УДК 164.3+164.08 DOI: 10.18698/2306-8477-2019-6-639

Квазифункциональность в логике и других науках

© Ю.В. Ивлев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Представлен обзор результатов исследований автора по проблеме применения методологического принципа квазифункциональности в логике и других областях познания. Методологический принцип квазифункциональности заключается в интерпретации логических терминов как квазифункций, а также в понимании отношений между явлениями природы, общественной жизни и познания в качестве квазифункциональных. Утверждается, что функциональность является частным случаем квазифункциональности. Отсюда следует, что детерминизм является частным случаем квазидетерминизма. Изложены построенные автором логические системы (исчисления и их семантики). Приведены примеры применения указанного принципа в математике, гуманитарном и естественнонаучном познании.

Ключевые слова: *функция, квазифункция, модальная логика, онтологическая модальность, логическая модальность, исчисление, семантика исчисления, квазифункциональность в естествознании, квазифункциональность в социуме*

Понятие квазифункции

Функцию можно рассматривать как операцию, применяя которую к определенному объекту из области определения функции, получают определенный объект из области значений функции. Квазифункция — операция, применяя которую к какому-то (неизвестно к какому) объекту из подмножества области определения квазифункции, получают какой-то (неизвестно какой) объект из подмножества области значений квазифункции.

Пример. Пусть область определения квазифункции — множество **{a, b, c, d}**, а область значений — **{e, f, k, m, n}**. Квазифункция — $\underline{\vee}_6$ **({b, f}, {b, k}, {b, m}, {c, f}, {c, k}, {c, m}).** Здесь $\underline{\vee}_6$ — знак шестиместной строгой дизъюнкции.

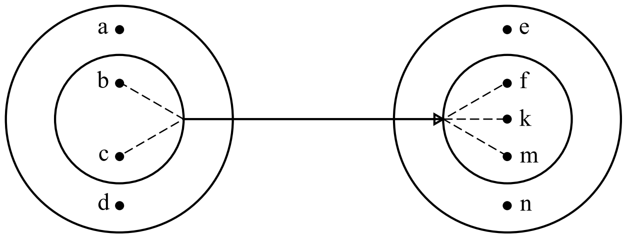

Рис. 1. Графическое представление квазифункции

Операция применяется к какому-то объекту из подмножества **{b, c}** области определения квазифункции **{a, b, c, d}**, а в результате получают какой-то объект из подмножества **{f, k, m}** области определения квазифункции **{e, f, k, m, n}**. Поскольку функция может быть многозначной (корни квадратного уравнения), то и квазифункция может быть многозначной. Функция может быть вероятностной, квазифункция тоже может быть вероятностной и т. д. Квазифункция не сводится к суперпозиции функций. Подобласти области определения квазифункции, к которым применяется указанная операция, а также указанные подобласти области значений квазифункции могут состоять из одного элемента, т. е. частным случаем квазифункции является функция. Кроме того, данные подобласти могут совпадать с областями определения и значений квазифункции, тогда имеет место полная неопределенность. Иначе, частными случаями квазифункции являются функция и полная неопределенность (хаотичность).

Двухзначная квазифункциональная логика $\mathbf{S_{min}}$

Язык содержит обычные символы классической логики высказываний, а также знаки необходимости (□) и возможности (◊). К обычным определениям логических терминов классической логики высказываний добавляются следующие определения знаков необходимости и возможности.

Если формула A имеет значение f (ложь), то формула □A тоже имеет значение f. Знак «□» может интерпретироваться и как «необходимо онтологически», и как «необходимо логически». Если формула A имеет значение t (истина), то формула □A имеет либо значение t, либо значение f, т. е. в последнем случае рассматриваются две возможности.

Если формула A имеет значение t, то формула ◊A тоже имеет значение t. Знак «◊» может интерпретироваться и как «возможно онтологически», и как «возможно логически». Если формула A имеет значение f, то формула ◊A имеет либо значение t, либо значение f.

Выделенным значением является t.

Исчисление $\mathbf{S_{min}}$. К схемам аксиом и правилам вывода классического исчисления высказываний добавляются две новые схемы аксиом: $\Box A \supset A$; $A \supset \Diamond A$.

Очевидно, что исчисление $\mathbf{S_{min}}$ семантически непротиворечиво.

Замечание. Логика $\mathbf{S_{min}}$ построена автором данной статьи (далее — *автор*) в конце 1960-х гг. Позже, в 1970 г., Б.Н. Пятницын (он читал кандидатскую диссертацию *автора* [1]) сообщил, что Н. Решер сделал такие же определения модальных терминов необходимости и возможности [2]. Однако квазифункциональной логической системы

Решер не построил. Решер построил логическую систему, в которой выделенными значениями являются «истина» и неопределенность — «то ли истина, то ли ложь». Если довести идею Решера до логического конца, то следует признать законом логики любое элементарное высказывание (пропозициональную переменную). Так что можно утверждать, что первой системой квазифункциональной логики является логика $\mathbf{S_{min}}$.

Четырехзначные квазиматричные логики

Как отмечено выше, если формула A имеет значение t, то формула $\Box$A имеет либо значение t, либо значение f. Это означает, что положение дел, описываемое формулой A, имеет место (существует) и является однозначно детерминированным какими-либо обстоятельствами, тогда оно является необходимым онтологически, или же положение дел имеет место и оно логически необходимо. Принимается, что если положение дел, описываемое высказыванием A, необходимо, то и высказывание имеет значение «необходимо», если положение дел случайно, то и высказывание имеет значение «случайно». Рассуждая аналогично, получаем значения «ложно и случайно», «ложно и невозможно». Обозначения: t^n, t^c, f^i, f^c, t^N, t^C, f^I, f^C соответственно читаются: онтологически необходимая истина, онтологически случайная истина, онтологически необходимая ложь (ложно и онтологически невозможно), онтологически случайная ложь, логически необходимая истина, логически случайная истина, логически необходимая ложь (ложно логически), логически случайная ложь [3–10].

Основные четырехзначные логики онтологических модальностей

Этими логиками являются системы $\mathbf{S_a^+}$, $\mathbf{S_f^+}$, $\mathbf{S_g^+}$, $\mathbf{S_h^+}$, $\mathbf{S_i^+}$. В них логические термины интерпретируются посредством квазифункций.

Определения немодальных терминов:

	A	B	A&B	$A \vee B$	$A \supset B$	$\neg A$
1	t^n	t^n	t^n	t^n	t^n	f^i
2	t^n	t^c	t^c	t^c	t^c	f^i
3	t^n	f^i	f^i	f^i	f^i	f^i
4	t^n	f^c	f^c	f^c	f^c	f^i
5	t^c	t^n	t^c	t^c	t^n	f^c
6	t^c	t^c	t^c	t^n/t^c	t^n/t^c	f^c
7	t^c	f^i	f^i	t^c	f^c	f^c
8	t^c	f^c	f^i/f^c	t^n/t^c	f^c	f^c
9	f^i	t^n	f^i	t^n	t^n	t^n
10	f^i	t^c	f^i	t^c	t^n	t^n
11	f^i	f^i	f^i	f^i	t^n	t^n

12	f^i	f^c	f^i	f^c	t^n	t^n
13	f^c	t^n	f^c	t^n	t^n	t^c
14	f^c	t^c	f^i/f^c	t^n/t^c	f^i/t^c	t^c
15	f^c	f^i	f^i	f^c	t^c	t^c
16	f^c	f^c	f^i/f^c	f^c	t^n/t^c	t^c

Пример. Автор данной статьи в настоящий момент времени находится в Москве и находится в Туле. Если то и другое ложно, то это невозможно. Если одно из этих утверждений истинно, а второе ложно, то это тоже невозможно. Несложно привести примеры высказываний такого типа, которые выражают ситуации несуществующие, но возможные.

Квазиматричная логика $\mathbf{S_a^+}$. Язык содержит следующие символы: $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\supset$. Квазиматрица — ($\{t^n, t^c, f^i, f^c\}$, $\{t^n, t^c\}$, f^1, qf^2, qf_1, qf_2). Посредством функции f^1 определяется отрицание:

$$|\neg A| = t^n \Leftrightarrow |A| = f^i; |\neg A| = t^c \Leftrightarrow |A| = f^c; |\neg A| = f^i \Leftrightarrow |A| = t^n; |\neg A| = \\ = f^c \Leftrightarrow |A| = t^c.$$

Квазифункция qf^2 является интерпретацией импликации:

$|A \supset B| = f^c \Leftrightarrow (|A| = t^n$ и $|B| = f^c)$ или $(|A| = t^c$ и $|B| = f^i)$; $|A \supset B| = f^i \Leftrightarrow |A| = t^n$ и $|B| = f^i$; если или $(|A| = t^n$ и $|B| = t^c)$, или $(|A| = f^c$ и $|B| = f^i)$, то $|A \supset B| = t^c$; если $|A| = f^i$ или $|B| = t^n$, то $|A \supset B| = t^n$; если или $|A| = |B| = t^c$, или $(|A| = f^c$ и $|B| = t^c)$, или $|A| = |B| = f^c$, то $|A \supset B| \in \{t^n, t^c\}$.

Определение квазифункции qf_1: $|A| = t^n \Rightarrow |\Box A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| \in \{t^c, f^c, f^i\} \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i\}$.

Определение qf_2: $|A| \in \{t^n, t^c, f^c\} \Rightarrow |\Diamond A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Diamond A| \in \{f^c, f^i\}$.

Выделенные значения — t^n и t^c.

Исчисление $\mathbf{S_a^+}$**.** К исчислению классической логики высказываний добавляются схемы аксиом:

$$\Box A \supset A;\ \neg\Box\neg A \supset \Diamond A;\ \Diamond A \supset \neg\Box\neg A;\ \neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B);\ \Box B \supset \Box(A \supset B); \\ \Diamond B \supset \Diamond(A \supset B);\ \Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B);\ \Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B);\ \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B); \\ \Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B).$$

Определения доказательства, теоремы и вывода обычные.

Квазиматричная логика $\mathbf{S_h^+}$. Язык тот же, что и в логике $\mathbf{S_a^+}$. Квазиматрица — ($\{t^n, t^c, f^i, f^c\}$, $\{t^n, t^c\}$, f^1, qf^2, qf_1, qf_2). Посредством функции f^1 отрицание определяется так же, как и в логике $\mathbf{S_a^+}$.

Квазифункция qf^2 тоже определяется, как в логике $\mathbf{S_a^+}$.

Определение квазифункции qf_1: $|A| = t^n \Rightarrow |\Box A| = t^n$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i\}$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i\}$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Box A| = f^i$. Определение qf_2: если $|A| = t^c$ или $|A| = f^c$, то $|\Diamond A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = t^n \Rightarrow |\Diamond A| = t^n$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Diamond A| = f^i$.

Исчисление $\mathbf{S_h^+}$**.** К исчислению классической логики высказываний добавляются схемы аксиом: $\Box A \supset A$; $\Box A \supset \Box\Box A$; $\Diamond\Box A \supset \Diamond A$; $\Box A \supset \Box\Diamond A$; $\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$ и правило вывода — замена двойного отрицания формулы на саму формулу и наоборот. Определения доказательства, теоремы и вывода обычные.

Квазиматричная логика $\mathbf{S_g^+}$**.** Язык тот же.

Квазиматрица — $(\{t^n, t^c, f^i, f^c\}, \{t^n, t^c\}, f^1, qf^2, qf_1, qf_2)$. Посредством функции f^1 отрицание определяется так же, как и в логике $\mathbf{S_a^+}$:

Квазифункция qf^2 тоже определяется, как в логике $\mathbf{S_a^+}$.

Определение квазифункции qf_1: $|A| = t^n \Rightarrow |\Box A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Box A| = f^c$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Box A| = f^c$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i\}$. Определение qf_2: $|A| = t^c, \Rightarrow |\Diamond A| = t^c$; $|A| = t^n \Rightarrow |\Diamond A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Diamond A| \in \{f^c, f^i\}$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Diamond A| = t^c$.

Исчисление $\mathbf{S_g^+}$**.** Берем все дополнительные схемы аксиом предшествующего исчисления и отбрасываем те, которые не являются схемами общезначимых формул. Получаем: $\Box A \supset A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$.

Квазиматричная логика $\mathbf{S_f^+}$**.** Язык тот же. Квазиматрица — $(\{t^n, t^c, f^i, f^c\}, \{t^n, t^c\}, f^1, qf^2, qf_1, qf_2)$. Посредством функции f^1 отрицание определяется так же, как и в логике $\mathbf{S_a^+}$:

Квазифункция qf^2 тоже определяется, как в логике $\mathbf{S_a^+}$.

Определение квазифункции qf_1: $|A| = t^n \Rightarrow |\Box A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Box A| = f^i$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Box A| = f^i$.

Определение qf_2: $|A| = t^c \Rightarrow |\Diamond A| = t^n$; $|A| = t^n \Rightarrow |\Diamond A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Diamond A| \in \{f^c, f^i\}$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Diamond A| = t^n$.

Исчисление $\mathbf{S_f^+}$**.** Схемы аксиом: $\Box A \supset A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\Diamond\Box A \supset (A \supset \Box A)$; $\Diamond\Box A \supset (\Diamond A \supset A)$; $A \supset (\Diamond\neg A \supset \Box\Diamond A)$; $\neg A \supset (\Diamond A \supset \Box\Diamond A)$.

Квазиматричная логика $\mathbf{S_i^+}$**.** Язык тот же. Квазиматрица — $(\{t^n, t^c, f^i, f^c\},\{t^n, t^c\}, f^1, qf^2, qf_1, qf_2)$. Посредством функций f^1, qf^2 отрицание и импликация определяются так же, как и в логике $\mathbf{S_a^+}$. Определение квазифункции qf_1: $|A| = t^n \Rightarrow |\Box A| \in t^c$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i\}$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Box A| \in f^c$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Box A| \in \{f^c, f^i\}$.

Определение qf_2: $|A| = t^n \Rightarrow |\Diamond A| = t^n$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Diamond A| \in \{t^n, t^c\}$; $|A| = f^i \Rightarrow |\Diamond A| = t^c$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Diamond A| \in \{t^n, t^c\}$.

Исчисление $\mathbf{S_i^+}$**.** Схемы аксиом: $\Box A \supset A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; $\neg\Diamond\Diamond A$; $\Diamond\neg\Box A$; $\neg\Diamond A \supset \Diamond\Box A$; $\Box A \supset \Diamond\neg\Diamond A$.

Матричные четырехзначные логики онтологических модальностей

Эти логики выражают отношения по формам между высказываниями о ситуациях, которые независимы относительно друг друга. Логические термины интерпретируются посредством функций, а функции, как указано выше, являются частными случаями квазифункций.

Определения:

	A	B	A&B	$A \vee B$	$A \supset B$	$\neg A$
1	t^n	t^n	t^n	t^n	t^n	f^i
2	t^n	t^c	t^c	t^c	t^c	f^i
3	t^n	f^i	f^i	f^i	f^i	f^i
4	t^n	f^c	f^c	f^c	f^c	f^i
5	t^c	t^n	t^c	t^c	t^n	f^c
6	t^c	t^c	t^c	t^c	t^c	f^c
7	t^c	f^i	f^i	t^c	f^c	f^c
8	t^c	f^c	f^c	t^c	f^c	f^c
9	f^i	t^n	f^i	t^n	t^n	t^n
10	f^i	t^c	f^i	t^c	t^n	t^n
11	f^i	f^i	f^i	f^i	t^n	t^n
12	f^i	f^c	f^i	f^c	t^n	t^n
13	f^c	t^n	f^c	t^n	t^n	t^c
14	f^c	t^c	f^c	t^c	t^c	t^c
15	f^c	f^i	f^i	f^c	t^c	t^c
16	f^c	f^c	f^c	f^c	t^c	t^c

Логика $\mathbf{S_b^-}$**.** К логическим символам классической логики «$\neg$» и «$\supset$» добавляются знаки необходимости ($\Box$) и возможности ($\Diamond$). Определение формулы обычное.

Семантика. Логика является матричной.

Матрица: $(\{t^n, t^c, f^i, f^c\}, \{t^n, t^c\}, f^1{}_1, f^1{}_2, f^1{}_3, f^2{}_1)$.

Здесь $\{t^n, t^c, f^i, f^c\}$ — множество элементов матрицы; $\{t^n, t^c\}$ — множество выделенных значений; функции $f^1{}_1$, $f^1{}_2$, $f^1{}_3$, $f^2{}_1$ соответствуют отрицанию, необходимости, возможности и импликации.

«| |» — функция приписывания значений формулам.

Если P — пропозициональная переменная, то $|P| \in \{t^n, t^c, f^i, f^c\}$. Пусть значения формул A и B определены. Тогда

$|\neg A| = t^n \Leftrightarrow |A| = f^i$; $|\neg A| = t^c \Leftrightarrow |A| = f^c$; $|\neg A| = f^i \Leftrightarrow |A| = t^n$; $|\neg A| = f^c \Leftrightarrow |A| = t^c$;

$|\Box A| = t^n \Leftrightarrow |A| = t^n$; $|\Box A| = f^i \Leftrightarrow |A| = f^i$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Box A| = f^c$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Box A| = f^c$;

$|\Diamond A| = t^n \Leftrightarrow |A| = t^n$; $|\Diamond A| = f^i \Leftrightarrow |A| = f^i$; $|A| = t^c \Rightarrow |\Diamond A| = t^c$; $|A| = f^c \Rightarrow |\Diamond A| = t^c$;

если $|B| \in t^n$ или $|A| = f^i$, то $|A \supset B| = t^n$; если $|A| \in \{t^n, t^c, f^c\}$ и $|B| = t^c$, то $|A \supset B| = t^c$;

если $|A| = f^c$ и $|B| \in \{f^c, f^i\}$, то $|A \supset B| = t^c$; если $|A| = t^c$ и $|B| \in \{f^c, f^i\}$, то $|A \supset B| = f^c$;

если $|A| = t^n$ и $|B| \in f^i$, то $|A \supset B| = f^i$; если $|A| = t^n$ и $|B| \in f^c$, то $|A \supset B| = f^c$.

Исчисление $\mathbf{S_b^-}$.

1. Схемы аксиом и правила вывода классического исчисления высказываний (КИВ).

2. Дополнительные схемы аксиом: $\Box A \supset A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Box B)$; $\Box A \supset \Box\Box A$; $\Diamond\Box A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \Diamond\Box A$; $\Box A \supset \Box\Diamond A$; $\Box\Diamond A \supset \Box A$; $\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$.

Логика $\mathbf{S_c^-}$. Синтаксис языка тот же.

Семантика. Изменяется, по сравнению с логикой $\mathbf{S_b^-}$, только приписывание значений модальным терминам:

$|\Box A| = t^n \Leftrightarrow |A| = t^n$; $|A| \in \{f^i, t^c, f^c\} \Leftrightarrow |\Box A| = f^i$;

$|\Diamond A| = f^i \Leftrightarrow |A| = f^i$; $|A| \in \{f^i, t^c, f^c\} \Leftrightarrow |\Diamond A| = t^n$.

Выделенные значения те же.

Исчисление $\mathbf{S_c^-}$.

1. Схемы аксиом и правила вывода КИВ.

2. Дополнительные схемы аксиом: $\Box A \supset A$; $\neg\Box\neg A \supset \Diamond A$; $\Diamond A \supset \neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A \supset \Box(A \supset B)$; $\Box B \supset \Box(A \supset B)$; $\Diamond B \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond\neg A \supset \Diamond(A \supset B)$; $\Diamond(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Diamond B)$; $\Box(A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Box B)$; $\Box A \supset \Box\Box A$; $\Diamond\Box A \supset \Box A$; $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$; $\Diamond\Diamond A \supset \Diamond A$.

Логика $\mathbf{S_d^-}$. Синтаксис языка тот же.

Семантика.

$|A| = t^n \Leftrightarrow |\Box A| = t^c$; $|A| \in \{f^i, t^c, f^c\} \Leftrightarrow |\Box A| = f^c$.

$|A| \in f^i \Leftrightarrow |\Diamond A| = f^c$; $|A| \in \{t^n, t^c, f^c\} \Leftrightarrow |\Diamond A| = t^c$.

Остальные логические термины определяются так же, как в изложенных выше системах.

Выделенные значения те же.

Исчисление $\mathbf{S_d^-}$.

1. Схемы аксиом и правила вывода КИВ.

2. Дополнительные схемы аксиом: $\Box A\supset A$; $\neg\Box\neg A\supset\Diamond A$; $\Diamond A\supset\neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A\supset\Box(A\supset B)$; $\Box B\supset\Box(A\supset B)$; $\Diamond B\supset\Diamond(A\supset B)$; $\Diamond\neg A\supset\Diamond(A\supset B)$; $\Diamond(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Diamond B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset\Box B)$; $\Diamond A^*$, где A^* — модализированная формула.

Логика $\mathbf{S}_{\mathbf{e}}^{-}$. Синтаксис языка тот же.

Семантика.

$|A| = t^n \Leftrightarrow |A| = t^c$; $|A| = f^i \Leftrightarrow |\Box A| = f^c$; $|A| \in \{t^c, f^c\} \Leftrightarrow |\Box A| = f^i$.

$|A| \in f^i \Leftrightarrow |\Diamond A| = f^c$; $|A| \in t^n \Leftrightarrow |\Diamond A| = t^c$; $|A| \in \{t^c, f^c\} \Leftrightarrow |\Diamond A| = t^n$.

Остальные логические термины определяются так же, как в изложенных выше системах.

Выделенные значения те же.

Исчисление **$\mathbf{S}_{\mathbf{e}}^{-}$.**

1. Схемы аксиом и правила вывода КИВ.

2. Дополнительные схемы аксиом: $\Box A\supset A$; $\neg\Box\neg A\supset\Diamond A$; $\Diamond A\supset\neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A\supset\Box(A\supset B)$; $\Box B\supset\Box(A\supset B)$; $\Diamond B\supset\Diamond(A\supset B)$; $\Diamond\neg A\supset\Diamond(A\supset B)$; $\Diamond(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Diamond B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset\Box B)$; $\Diamond\Diamond A$; $\Diamond\neg\Box A$; $\neg\Diamond A\supset\Diamond\Box A$; $\Box A\supset\Diamond\neg\Diamond A$; $\Diamond\Box A\supset(A\supset\Box A)$; $\Diamond\Box A\supset(\Diamond A\supset A)$; $A\supset(\Diamond\neg A\supset\Box\Diamond A)$; $\neg A\supset(\Diamond A\supset\Box\Diamond A)$.

Трехзначная квазиматричная логика $\mathbf{S}_{\text{г}}$. Логические термины $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\supset$, &, $\vee$ — соответственно знаки необходимости (онтологической), возможности (онтологической), отрицания, импликации, конъюнкции и дизъюнкции. Определение формулы обычное.

Исчисление включает все схемы аксиом КИВ, в которых метасимволы A, B, C обозначают модализированные формулы, т. е. формулы, в которых каждая пропозициональная переменная находится в области действия какого-либо из модальных терминов $\Box$ и $\Diamond$, modus ponens, правило Геделя ($|\!-A\Rightarrow|\!-\Box A$), а также схемы аксиом:
$\Box A\supset\Diamond A$; $\neg A\supset\neg\Box A$; $\neg\Diamond A\supset\neg A$; $A\supset\Diamond A$; $\Box A\supset\Box\Box A$; $\Diamond\Diamond A\supset\Diamond A$; $\Diamond\Box A\supset\Box A$; $\Diamond A\supset\Box\Diamond A$; $\Box A\supset A$; $\neg\Box\neg A\supset\Diamond A$; $\Diamond A\supset\neg\Box\neg A$; $\neg\Diamond A\supset\Box(A\supset B)$; $\Box B\supset\Box(A\supset B)$; $\Diamond B\supset\Diamond(A\supset B)$; $\Diamond\neg A\supset\Diamond(A\supset B)$; $\Diamond(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Diamond B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$; $\Box(A\supset B)\supset(\Diamond A\supset\Diamond B)$; $\Box(A\&B)\supset(\Box A\&\Box B)$; $(\Box A\&\Box B)\supset\Box(A\&B)$; $(\Diamond A\&\Box B)\supset\Diamond(A\&B)$; $(\Box A\&\Diamond B)\supset\Diamond(A\&B)$; $\Diamond(A\&B)\supset(\Diamond A\&\Diamond B)$; $\Box A\vee(\Diamond A\&\Diamond\neg A)\vee\neg\Diamond A$; $(\Box A\vee\Box B)\supset\Box(A\Box B)$; $(\Diamond A\vee\Diamond B)\supset\Diamond(A\vee B)$; $\Box(A\vee B)\supset(\Box A\vee\Diamond B)$; $\Box(A\vee B)\supset(\Diamond A\vee\Box B)$; $\Diamond(A\vee B)\supset(\Diamond A\vee\Diamond B)$.

Семантика. Символы $\Box$, $\Diamond$, $\neg$, $\supset$, &, $\vee$ интерпретируются как логические термины, определяемые следующими таблицами:

A	$\neg$A	$\Box$A	$\Diamond$A
n	i	n	n
c	c	i	n
i	n	i	i

			B	
	⊃	n	c	i
	n	n	c	i
A	c	n	n/c	i
	i	n	n	n

			B	
	&	n	c	i
	n	n	c	i
A	c	c	i/c	i
	i	i	i	i

			B	
	∨	n	c	i
	n	n	n	n
A	c	n	n/c	c
	i	n	c	i

Здесь n, c, i — соответственно значения «однозначно детерминировано фактически (онтологически) наличие положения дел», «не детерминировано однозначно фактически наличие положения дел и не детерминировано однозначно фактически отсутствие положения дел», «однозначно детерминировано фактически отсутствие положения дел».Выражение i/c означает «то ли i, то ли c», n/c понимается как «то ли n, то ли c». Выделенное значение — n.

Логика $\mathbf{S_r}$ может быть *переинтерпретирована.*

(1) *Квазиматричная паранепротиворечивая логика высказываний, которыми выражается сомнительная информация*. Язык этой логики содержит логические термины ¬, &, ∨, ⊃, соответственно понимаемые как знаки отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации, а также символы T и K, которые соответственно читаются как «достоверно известно, что», «известно». Определение формулы обычное. Определения логических терминов:

A	¬A	TA	KA		&	n	c	i		∨	n	c	i		⊃	n	c	i
n	i	n	n		n	n	c	i		n	n	n	n		n	n	c	i
c	c	i	n		c	c	i/c	i		c	n	n/c	c		c	n	n/c	c
i	n	i	i		i	i	i	i		i	n	c	i		i	n	n	n

Значения n, c, i соответственно понимаются как: «высказывание является несомненно истинным», «информация, выражаемая высказыванием, является сомнительной», «высказывание является несомненно ложным». Выражения i/c и n/c соответственно читаются «то ли i, то ли c», «то ли c, то ли n». Выделенное значение — n.

Исчисление, формализующее семантически построенную логику, содержит схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом классического исчисления высказываний, в которых метапеременные обозначают модализированные формулы, а также следующие схемы аксиом, в которых метапеременные обозначают любые формулы системы:

$TA \supset A$; $\neg A \supset \neg TA$; $A \supset KA$; $\neg KA \supset \neg A$;

$TA \supset KA$; $\neg T\neg A \supset KA$; $KA \supset \neg T\neg A$;

$TA \supset TTA$; $KTA \supset TA$; $KA \supset TKA$; $KKA \supset KA$;

$\neg KA \supset T(A \supset B)$; $TB \supset T(A \supset B)$;

$T(A \supset B) \supset (TA \supset TB)$; $T(A \supset B) \supset (KA \supset KB)$; $K(A \supset B) \supset (TA \supset \supset KB)$; $KB \supset K(A \supset B)$;

$K\neg A \supset K(A \supset B)$;

$TA\&TB \supset T(A\&B)$; $KA\&TB \supset K(A\&B)$; $TA\&KB \supset K(A\&B)$;

$T(A\&B) \supset TA\&TB$; $K(A\&B) \supset KA\&KB$;

$TA\vee(KA\wedge K\neg A)\vee\neg KA$;

$TA\vee TB \supset T(A\vee B)$; $KA\vee KB \supset K(A\vee B)$; $T(A\vee B) \supset TA\vee KB$;

$T(A\vee B) \supset KA\vee TB$; $K(A\vee B) \supset KA\vee KB$.

Правила вывода: modus ponens; правило Геделя: $A \Rightarrow TA$.

Определение доказательства обычное.

Семантика. Альтернативная интерпретация — это функция || ||. Ее определение: если P — пропозициональная переменная, то $||P||\in\{n, c, i\}$. Если $||A||$ и $||B||$ определены, то

$||\neg A|| = n \Leftrightarrow ||A|| = i$; $||\neg A|| = c \Leftrightarrow ||A|| = c$; $||\neg A|| = i \Leftrightarrow ||A|| = n$;

$||A\&B|| = n \Leftrightarrow ||A|| = ||B|| = n$;

если ($||A|| = n$ и $||B|| = c$) или ($||A|| = c$ и $||B|| = n$), то $||A\&B|| = c$;

если $||A|| = i$ или $||B|| = i$, то $||A\&B|| = i$;

если $||A|| = ||B|| = c$, то $||A\&B|| \in \{i, c\}$;

если $||A|| = n$ или $||B|| = n$, то $||A\vee B|| = n$;

если $||A|| = ||B|| = c$, то $||A\vee B|| \in \{n, c\}$;

если $||A|| = ||B|| = i$, то $||A\vee B|| = i$;

если ($||A|| = i$ и $||B|| = c$) или ($||A|| = c$ и $||B|| = i$), то $||A\vee B|| = c$;

если $||A|| = i$ или $||B|| = n$, то $||A\supset B|| = n$;

если $||A|| = ||B|| = c$, то $||A\supset B|| \in \{n, c\}$;

если $||A|| = c$ и $||B|| = i$, то $||A\supset B|| = c$;

$||A|| = n$ и $||B|| = i \Leftrightarrow ||A\supset B|| = i$;

$||TA|| = n \Leftrightarrow ||A|| = n$; если $||A|| = c$ или $||A|| = i$, то $||TA|| \in i$;

$||KA|| = i \Leftrightarrow ||A|| = i$; если $||A|| = n$ или $||A|| = c$, то $||KA|| = n$.

(2) *Логика пропозициональных установок*. Символы $\Box_k$и $\Diamond_k$ вводятся как сокращения для выражений «k уверен, что…», «k допускает, что…» соответственно. (Символ k можно опускать, если ясно, о

каком субъекте идет речь.) Язык содержит, кроме этих и обычных символов, следующие специальные символы: ′, ∗, +, → — соответственно суботрицание, субконъюнкция, субдизъюнкция и субимпликация; субпеременные а, б, в, a_1, …, . Субпеременная является субформулой. Если A и B — субформулы, то A′, (A · B), (A + B), (A → B) — субформулы. Если A — субформула, то $\oplus_{i1}$, …, $\oplus_{ir}$A — формула (индексы выражений $\oplus_{i1}$, …, $\oplus_{ir}$ различны, и $\oplus_{i1}$ есть $\Box_{i1}$ или $\Diamond_{i1}$ и т. д.). Если C и D — формулы, то ¬C, (C∧D) и т. д. — формулы. Субформула A может принимать значения n_k, i_k, c_k, которые соответственно означают: k уверен, что A истинно; k уверен, что A ложно; k допускает, что A истинно, и допускает, что A ложно. Определения:

A	¬A	$\Box_k$ A	$\Diamond_k$ A
n_k	i_k	t	t
c_k	c_k	f	t
i_k	n_k	f	f

A	B	(A · B)	(A + B)	(A → B)
n	n	n	n	n
n	c	c	n	c
n	i	i	n	i
c	n	c	n	n
c	c	i/c	n/c	n/c
c	i	i	c	c
i	n	i	n	n
i	c	i	c	n
i	i	i	i	n

Выделенное значение — t.

Пусть дана формула $\Box_1\ \Box_2\ \Diamond_3\ \Diamond_4$ (a + b). В каждой строке таблицы переменной приписываются четыре значения. Пусть в некоторой строке переменной a приписываются значения $n_1\ c_2\ i_3\ i_4$, а переменной b — $n_1\ c_2\ n_3\ i_4$. Получаем:

$$\begin{array}{lllllll} \Box_1 & \Box_2 & \Diamond_3 & \Diamond_4 & (a & + & b). \\ &&&& n_1 & n_1 & n_1 \\ t & t/f & t & f & c_2 & n_2/c_2 & c_2 \\ &&&& i_3 & n_3 & n_3 \\ &&&& i_4 & i_4 & i_4 \end{array}$$

Строка таблицы расщепляется на две подстроки:

$$\begin{array}{lllll} \Box_1 & \Box_2 & \Diamond_3 & \Diamond_4 & (a + b). \\ t & t & t & f & \\ t & f & t & f & \end{array}$$

$|\Box_1\ \Box_2\ \Diamond_3\ \Diamond_4\ (a + b)| = t$, если и только если $\forall_i\ |\oplus_i (a + b)| = t$, где i — переменная, область значений которой есть {1, 2, 3, 4}.

В качестве *проблем* формулируются также *следующие задачи.*

(1) Создание *компьютерной программы для моделирования процессов с частично неопределенными результатами* на основе логики $\mathbf{S_г}$.

(2) *Графическая интерпретация* логических терминов логики $\mathbf{S_г}$.

(3) Разработка *теории абстрактных квазиавтоматов*. Квазиавтомат — это устройство, имеющее вход и выход. Внутренний механизм устройства таков, что при некотором определенном входном сигнале реакция на выходе и изменение состояния устройства определены не полностью. Можно представить ситуацию, когда n квазиавтоматов имеют n входов. Им послано n различных сигналов. Неизвестно, какой сигнал воспринят тем или иным квазиавтоматом. Неизвестны также реакции квазиавтоматов на выходе, но известны наборы возможных реакций. Задача заключается в разработке теории, позволяющей определять «суммарное» поведение системы квазиавтоматов.

(4) *Трехполюсные переключательные схемы.* Электрический переключатель имеет три позиции: цепь замкнута (n), цепь разомкнута (i), цепь замкнута, но прохождение электрического тока ограничено (c). Очевидно, что в случае третьих позиций двух переключателей при последовательном их соединении лампочка может слабо гореть, а может совсем не гореть, а при параллельном — может гореть в полную мощность, а может слабо гореть. Задача создания теории трехполюсных переключательных схем на основе квазиматричной логики формулируется в качестве проблемы для решения.

Квазифункциональная логика ограниченных множеств описаний состояний

Ограниченные множества описаний состояний (ОМОСы). Посредством ОМОСов устанавливаются отношения по формам между высказываниями с модальными терминами «логически возможно» и «логически необходимо». Семантика строится на основе обобщения принципов классической логики [4, 7]. Результатами обобщения являются:

(1) *принцип четырехзначности* — высказывания оцениваются как истинные и ложные (t, f), и если высказывание принимает значение t, то оно также принимает какое-то значение из области {N, C} (N и C — значения «логически необходимо», «логически случайно» («логически не детерминировано») соответственно), а если оно принимает значение f, то оно принимает также значение из области {C, I} (I — значение «логически невозможно»), т. е., согласно принципу четырехзначности, высказывание принимает значение из области $\{t^N, t^C, f^I, f^C\}$;

(2) *принцип непротиворечия* — высказывание не может иметь более одного значения из области $\{t^N, t^C, f^I, f^C\}$;

(3) *принцип исключенного пятого* — высказывание обязательно имеет какое-то значение из указанной области;

(4) *принцип тождества* — в сложном высказывании, системе высказываний, рассуждении одно и то же высказывание имеет одно и то же значение из области $\{t^N, t^C, f^I, f^C\}$.

В основе нашего подхода к построению семантики логических модальностей лежит интерпретация каждого элементарного (или атомарного, если речь идет о логике предикатов) высказывания в качестве логически истинного (значение N), логически недетерминированного (логически случайного, значение C) и логически ложного (значение I). Каждая конъюнкция логически недетерминированных высказываний, в свою очередь, интерпретируется в качестве логически недетерминированного или логически ложного высказывания и т. д. В результате таких интерпретаций из множества возможных описаний состояний для формулы могут исключаться некоторые описания состояний. Результатом ограничения как раз и являются *ограниченные множества описаний состояний*.

Пусть дана формула $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$, в которой $\Box$ — знак логической необходимости. Пусть переменные p и q имеют значения T и C соответственно, т. е. первая из них интерпретируется в качестве логически истинного высказывания, а вторая — в качестве логически недетерминированного. Множество возможных описаний состояний для формулы обозначим буквой W:

$$\{\alpha_1=\{p, q\}, \alpha_2=\{p, \neg q\}, \alpha_3=\{\neg p, q\}, \alpha_4=\{\neg p, \neg q\}\}.$$

При такой интерпретации высказывание p не может быть ложным, а высказывание q может быть как истинным, так и ложным, т. е. из исходного множества описаний состояний исключаются описания состояний α_3 и α_4.

Факт интерпретации элементарного высказывания «a» в качестве логически истинного, логически ложного и логически недетерминированного будем обозначать формулами $\neg\Diamond\neg a$, $\neg\Diamond a$, $\Diamond a\&\Diamond\neg a$ соответственно ($\Diamond$ — знак логической возможности). Пусть R есть множество таких формул. Для приведенной выше формулы возможны следующие интерпретации переменных:

1) $(\{\neg\Diamond\neg p, \neg\Diamond\neg q\}; \{\{p, q\}\})$;
2) $(\{\neg\Diamond\neg p, \neg\Diamond q\}; \{\{p, \neg q\}\})$;
3) $(\{\neg\Diamond\neg p, \Diamond q, \Diamond\neg q\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}\})$;
4) $(\{\neg\Diamond p, \neg\Diamond\neg q\}; \{\{\neg p, q\}\})$;
5) $(\{\neg\Diamond p, \neg\Diamond q\}; \{\{\neg p, \neg q\}\})$;
6) $(\{\neg\Diamond p, \Diamond q, \Diamond\neg q\}; \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$;

7) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \neg\Diamond\neg q\}; \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}\})$;

8) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \neg\Diamond q\}; \{\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$;

9) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q\}; \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\},\{\neg p, \neg q\}\})$.

Если формула содержит n переменных, то число таких интерпретаций равно 3^n. Например, пусть переменные p и q приведенной выше формулы принимают значения T и I соответственно. Тогда R есть множество $\{\neg\Diamond\neg p, \neg\Diamond q\}$.

Если два или более элементарных высказываний интерпретируются в качестве логически недетерминированных, то конъюнкция этих высказываний (некоторые из них могут быть взяты с отрицаниями), в свою очередь, интепретируется в качестве логически возможного высказывания или логически невозможного (логически ложного) высказывания. Ограничение R расширяется до R′. Полученное таким образом множество называется ОМОС и обозначается W′.

Если элементарные высказывания $a_1, ..., a_n$ интерпретируются как логически недетерминированные, то факт интерпретации конъюнкции $\underline{a}_1\&...\&\underline{a}_n$ ($\underline{a}_k$ есть a_k или $\neg a_k$) в качестве логически невозможного высказывания обозначается так: $\neg\Diamond(\underline{a}_1\&...\&\underline{a}_n)$, а факт интерпретации в качестве логически возможного: $\Diamond(\underline{a}_1\&...\&\underline{a}_n)$.

Например, приведенное выше девятое ограниченное множество описаний состояний преобразуется в следующие множества:

1) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \Diamond(p\&q), \Diamond(p\&\neg q), \Diamond(\neg p\&q), \Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$;

2) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \neg\Diamond(p\&q), \Diamond(p\&\neg q), \Diamond(\neg p\&q), \Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$;

3) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \neg\Diamond(p\&q), \Diamond(p\&\neg q), \Diamond(\neg p\&q), \neg\Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\})$;

4) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \Diamond(p\&q), \Diamond(p\&\neg q), \Diamond(\neg p\&q), \neg\Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\})$;

5) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \Diamond(p\&q), \neg\Diamond(p\&\neg q), \Diamond(\neg p\&q), \Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$;

6) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \Diamond(p\&q), \neg\Diamond(p\&\neg q), \neg\Diamond(\neg p\&q), \Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$;

7) $(\{\Diamond p, \Diamond\neg p, \Diamond q, \neg\Diamond q, \Diamond(p\&q), \Diamond(p\&\neg q), \neg\Diamond(\neg p\&q), \Diamond(\neg p\&\neg q)\}$; $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\})$.

Формулам приписываются значения в описаниях состояний, входящих в ОМОСы. Элементарное высказывание является истинным в описании состояния, если и только если оно входит в это описание состояния не со знаком отрицания. Формула A&B является истинной в описании состояния, если и только если в этом описании состояния истинны формулы A и B, и т. д. для других немодальных логических терминов. Формула $\Box A$ является истинной в описании состояния ОМОСа если и только если формула A является истинной в каждом описании состояния этого ОМОСа. Формула $\Diamond A$ ($\Diamond$ — оператор логической возможности, вводится посредством определения $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$) является истинной в описании состояния ОМОСа, если и только если формула A является истинной в некотором описании состояния ОМОСа.

Формула является выполнимой в ОМОСе, если и только если она истинна в некотором описании состояния этого ОМОСа. Формула является общезначимой в ОМОСе, если и только если она истинна в каждом описании состояния этого ОМОСа. Формула является выполнимой, если и только если она выполнима в некотором ОМОСе. Формула является общезначимой, если и только если она общезначима в каждом ОМОСе. Общезначимыми являются те и только те формулы, которые доказуемы в исчислении **S5**.

Теперь ясен смысл модельных структур реляционной семантики для этого исчисления. Модельная структура — это одна из интерпретаций пропозициональных переменных, входящих в формулу (формулы), посредством приписывания указанных выше значений, а также интерпретация конъюнкции пропозициональных переменных, проинтерпретированных в качестве логически случайных (перед некоторыми из пропозициональных переменных может стоять знак отрицания), в качестве логически возможного или логически невозможного высказывания.

Квазифункциональность в области математики

Трехзначная деонтическая логика. Язык содержит символы:

1) p, g, r, s, p_1, g_1, … — переменные для деяний (действий и бездействия);

2) $\cdot$, $\cup$, $'$ — знаки операций над деяниями, читаются соответственно «и», «или», «не» («воздержание от…»);

3) O, P — операторы, которые читаются «обязательно», «разрешено»;

4) $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ — логические связки;

5) скобки.

Определение субформулы:

1) переменная для деяний является субформулой;

2) если A и B являются субформулами, то A', $(A \cdot B)$, $(A \cup B)$ — субформулы;

3) ничто иное не является субформулой.

Определение формулы:

1) если A — субформула, то OA, PA — формулы;

2) если B и C — формулы, то $\neg B$, $(B \& C)$, $(B \vee C)$, $(B \supset C)$ — формулы;

3) ничто иное формулой не является.

Определения:

(A · B)	n	c	i
n	n	c	i
c	c	i/c	i
i	i	i	i

(A∪B)	n	c	i
n	n	n	n
c	n	n/c	c
i	n	c	i

A	A′
n	i
c	c
i	n

Значения n, c, i соответственно читаются «обязательно», «безразлично», «запрещено», i/c и n/c — «то ли i, то ли c» и «то ли n, то ли c». Операции ′, ·, ∪, имеют следующий смысл. Выражение A′ обозначает деяние, заключающее в воздержании от деяния A. Выражение (A · B) — деяние, заключающееся в последовательном выполнении деяний A и B (A, а затем B) или же в одновременном выполнении этих деяний. Выражение A∪B обозначает деяние, заключающееся в выполнении или деяния A, или деяния B, или в последовательном выполнении деяний A и B (A, а затем B), или в одновременном выполнении этих деяний.

Определения терминов O и P:

A	OA	PA
n	t	t
c	f	t
i	f	f

Формула принимает значения из области {t, f}. Выделенное значение — t. Определения терминов $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ обычные.

Формализацией семантически заданной логики является исчисление S_{3d}, содержащее схемы аксиом, совпадающие со схемами аксиом КИВ, в которых метапеременные обозначают формулы (но не субформулы), а также следующие дополнительные схемы аксиом, в которых буквами A и B обозначены субформулы:

$OA \supset PA$, $\neg OA' \supset PA$, $PA \supset \neg OA'$, $OA \supset \neg PA'$,

$OA \& OB \supset O(A \cdot B)$, $O(A \cdot B) \supset OA \& OB$,

$PA \& OB \supset P(A \cdot B)$, $OA \& PB \supset P(A \cdot B)$,

$P(A \cdot B) \supset PA \& PB$,

$OA \vee OB \supset O(A \cup B)$,

$PA \vee PB \supset P(A \cup B)$, $P(A \cup B) \supset PA \vee PB$,

$O(A \cup B) \supset PA \vee OB$, $O(A \cup B) \supset OA \vee PB$,

$O(A \cdot B)' \supset O(A' \cup B')$, $P(A \cdot B)' \supset P(A' \cup B')$,

$O(A' \cup B') \supset O(A \cdot B)'$, $P(A' \cup B') \supset P(A \cdot B)'$.

Правила вывода:

П1 — modus ponens;

П2 — замена произвольного вхождения субформулы A″ на A и vica versa;

П3 — замена произвольного вхождения субформулы $(A'\cup B')$ на $(A\cdot B)'$ и vica versa;

П4 — замена произвольного вхождения субформулы $(A\cup B)'$ на $(A'\cdot B')$ и vica versa;

Определение. ЗА $=_{df}$ $\neg$РА («ЗА» читается «запрещено А»).

Представить алгебру деяний в виде системы равенств (тождеств) не удается. В качестве проблемы ставим задачу нахождение аналога отношения равенства для квазиалгебр, а также задачу построения квазиалгебр по типу деонтической логики, т. е. построения квазиалгебры в рамках более богатой теории.

Предполагается построение других разделов математики, например математического анализа, геометрии, на основе принципа квазидетерминизма.

Квазифункциональность в других науках

Естествознание. Принцип квазидетерминизма применен в биологии [11, 12] при описании изменения генофонда в небольших изолированных популяциях, называемого дрейфом генов. Можно квазифункционально предвидеть результаты дрейфа генов.

Этот принцип объясняет работу нервных сетей. Нейрон можно представить в качестве объекта, имеющего один вход и один выход. Это, конечно, частная теоретическая модель нейрона, которая легко обобщается на случай нескольких входов и нескольких выходов. Здесь рассмотрим применимость указанной выше трехзначной логики. На вход нейрона поступает какой-то сигнал из подмножества, например из {n, c}, возможного множества {n, c, i} сигналов. На выход нейрона поступает из нейрона какой-то один, и только один, сигнал из подмножества, например из {n, i}. Пусть имеются два нейрона, на выход которых поступает один и тот же сигнал c. Тогда на вход системы нейронов, состоящей из двух новых нейронов, поступит либо сигнал c, либо сигнал i, если предположить, что эти два последних нейрона описаны формулой, соответствующей конъюнкции.

Таким образом, поведение нейронов может быть не определено или определено лишь частично, а поведение нейронной сети может быть определено полностью, может быть определено частично, а может быть совсем неопределенным. Возможно, что в таком поведении нейронов заключается объяснение интуиции: мозг работает как машина, которая является хотя и сложной, но все же конечной, ее работа не осознается и результаты получаются на выходе иногда правильные, а иногда нет, т. е. вариативные.

В работе [11] введены понятия однозначной и неоднозначной детерминации признаков организма. Например, одна и та же генная аномалия иногда приводит к заболеванию, а иногда нет. Эти явления тоже могут быть представлены посредством указанного принципа.

Важной областью знания, в которой применим принцип квазидетерминизма, является знание медицинское. В процессе диагностики и лечения устанавливаются не только причинно-следственные, т. е. функциональные, отношения между симптомами, заболеваниями и способами лечения, но и отношения квазифункциональные. Например, в одном случае симптом (будем считать совокупность признаков одним симптомом) позволяет сделать однозначный вывод об определенном заболевании. Это частный случай квазифункцинальности — функциональность, или детерминизм. В другом случае симптом позволяет судить о наличии лишь одного заболевания из нескольких. Это собственно квазифункциональность. Еще одним частным случаем квазифункциональности является полная неопределенность, названная выше хаотичностью. Далее, каждое определенное заболевание может требовать единственного способа лечения, а может допускать один из нескольких способов лечения. Способ лечения может отсутствовать — полная неопределенность. Такие ситуации должны учитываться при отрицательных результатах лечения, например, в процессе судебных разбирательств.

Технические науки. Обсуждаемый принцип может быть применен при проектировании автоматических устройств, в которых используются квазиавтоматы.

Автомат имеет вход и выход. На вход поступает сигнал, автомат его перерабатывает и выдает сигнал на выходе. Между сигналом на входе и сигналом на выходе имеет место функциональная зависимость. В квазиавтомате зависимость квазифункциональная. На вход поступает какой-то сигнал из подмножества множества возможных входных сигналов. На выходе возникает какой-то сигнал из подмножества множества возможных сигналов. Можно представить частный случай такой ситуации. На вход поступает определенный сигнал. На выходе возникает какой-то сигнал из подмножества множества возможных сигналов. Пусть имеется множество таких квазиавтоматов. Выходными сигналами являются перемещения самих квазиавтоматов. В данный момент времени нельзя установить место нахождения каждого из автоматов, но можно рассчитать, где будет находиться система квазиавтоматов в конечном счете. Каждый из квазиавтоматов можно представить в виде формулы модальной логики высказываний, а систему квазиавтоматов — в виде системы формул или в виде более сложной формулы. Сигналы на входе — наборы значений переменных формул, а сигнал на выходе — какое-то из значений более сложной формулы.

Гуманитарные науки. Применение принципа квазидетерминизма позволяет рассматривать возможные варианты развития социальных явлений в тех случаях, когда результаты развития отдельных составляющих социальной системы только частично (квазифункционально) предсказуемы, а результат развития системы в целом предсказуем полностью (а возможно, конечно, что только частично).

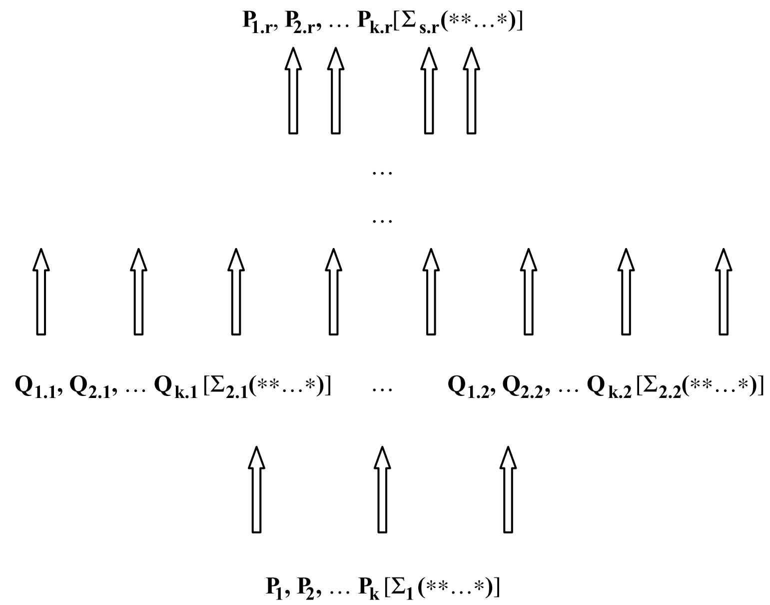

Рис. 2. Альтернативы развития

Стрелками показаны возможные альтернативы развития системы объектов Σ_1(**...*), а верхняя формула соответствует случаю, когда варианты развития системы этих объектов приводят к определенному состоянию системы. (Здесь $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, … $\mathbf{P_k}$ — начальные признаки системы объектов, а $\mathbf{Q_{1.1}}$, $\mathbf{Q_{2.1}}$, … $\mathbf{Q_{k.1}}$ и т. д. — (возможно) новые признаки измененной системы.)

В 2000-е годы квазифункциональная логика активно разрабатывается под названием «недетерминистская логика» [13–15].

Исследование частично выполнено при финансовой поддержке РГНФ (РФФИ) в рамках научного проекта № 15-03-00372а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Ю.В. *Логика норм*. Дис. … канд. филос. наук. Москва, 1972, 180 с.

[2] Rescher N. *Many-valued logic*. New York, McGraw Hill, 1969, 359 p.

[3] Ивлев Ю.В. *Квазиматричная (квазифункциональная) логика*. Москва, Издательство Московского университета, 2018, 128 с.

[4] Ивлев Ю.В. *Модальная логика*. Москва, Изд-во МГУ, 1991, 224 с.

[5] Ивлев Ю.В. *Содержательная семантика модальной логики*. Москва, Издательство Московского университета, 1985, 170 с.
[6] Ivlev Yu.V. A semantics for modal calculi. *Bulletin of the section of logic*, 1988, vol. 17, no. 3–4, pp. 114–126.
[7] Ivlev Yu.V. Quasi-matrix logic. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2005, vol. 11, no. 3–4, pp. 239–252.
[8] Ивлев Ю.В. Семантический анализ модальных высказываний. *Вестник Московского университета. Сер. 7: Философия*, 1982, № 5, с. 57–68.
[9] Ивлев Ю.В. Содержательная семантика модальной логики. В сб.: *Логико-методологические исследования*. Москва, Издательство Московского университета, 1980, с. 356–374.
[10] Ивлев Ю.В. Табличное построение пропозициональной модальной логики. *Вестник Московского университета. Сер. 7: Философия*, 1973, № 6, с. 61–70.
[11] Ивлев В.Ю. Категории необходимости, случайности и возможности: их смысл и методологическая роль в научном познании. *Философия и общество*, 1977, № 3, с. 108–125.
[12] Ивлев В.Ю., Ивлев Ю.В. От детерминизма к квазидетерминизму в логике и вне логики. *Логические исследования*, 2018, т. 24, № 2, с. 92–99.
[13] Coniglio M.E., Golzio A.C. Swap structures semantics for Ivlev-like model logics. *International Journal of Soft Computing*, 2019, vol. 23, no. 7, pp. 2243–2254.
[14] Coniglio M.E., del Cerro L.F., Peron N.M. Finite non-deterministic semantics for some model systems. *Journal of non-Classical Logics*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 20–45.
[15] Omori H., Skurt D. More Modal Semantics Without Possible Worlds. *IFColog Journal of Logics and their Applications*, 2016, vol. 3, pp. 815–846.

Статья поступила в редакцию 09.12.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Ивлев Ю.В. Квазифункциональность в логике и других науках. *Гуманитарный вестник*, 2019, вып. 6. http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2019-6-639

Ивлев Юрий Васильевич — д-р филос. наук, профессор кафедры логики философского факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, заслуженный профессор МГУ, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, лауреат Ломоносовской премии МГУ, академик РАЕН. e-mail: ivlev.logic@yandex.ru

Quasi-functionality in logic and other sciences

© Yu.V. Ivlev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

The paper reviews the author's research on the problem of applying the methodological principle of quasi-functionality in logic and other areas of knowledge. The methodological principle of quasi-functionality lies in the interpretation of logical terms as quasi-functions, as well as in understanding the relationships between natural phenomena, social life and cognition as quasi-functional. Functionality is asserted to be a special case of quasi-functionality. It follows that determinism is a special case of quasi-determinism. The study describes the logical systems — calculus and their semantics — constructed by the author. Examples of the application of this principle in mathematics, humanitarian and natural sciences are given.

Keywords: *function, quasi-function, modal logic, ontological modality, logical modality, calculus, semantics of calculus, quasi-functionality in natural science, quasi-functionality in society*

REFERENCES

[1] Ivlev Yu.V. *Logika norm.* Diss. … kand. filos. nauk [Logic of norms. Cand. philos. sc. diss.]. Moscow, 1972, 180 p.

[2] Rescher N. *Many-valued logic*. New York, McGraw Hill, 1969, 359 p.

[3] Ivlev Yu.V. *Kvazimatrichnaya (kvazifunktsionalnaya) logika* [Quasi-matrix (quasi-functional) logic]. Moscow, Moscow University Press, 2018, 128 p.

[4] Ivlev Yu.V. *Modalnaya logika* [Modal logic]. Moscow, Moscow University Press, 1991, 224 p.

[5] Ivlev Yu.V. *Soderzhatelnaya semantika modalnoy logiki* [Meaningful semantics of modal logic]. Moscow, Moscow University Press, 1985, 170 p.

[6] Ivlev Yu.V. A semantics for modal calculi. *Bulletin of the section of logic*, 1988, vol. 17, no. 3–4, pp. 114–126.

[7] Ivlev Yu.V. Quasi-matrix logic. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 2005, vol. 11, no. 3–4, pp. 239–252.

[8] Ivlev Yu.V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 7: Filosofiya — Moscow University Bulletin. Series 7. Philosophy,* 1982, no. 5, pp. 57–68.

[9] Ivlev Yu.V. Soderzhatelnaya semantika modalnoy logiki [Meaningful semantics of modal logic]. In: *Logiko-metodologicheskie issledovaniya* [Logical and methodological studies]. Moscow, Moscow University Press, 1980, pp. 356–374.

[10] Ivlev Yu.V. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 7: Filosofiya — Moscow University Bulletin. Series 7. Philosophy,* 1973, no. 6, pp. 61–70.

[11] Ivlev V.Yu. *Filosofiya i obshchestvo — Philosophy and Society*, 1977, no. 3, pp. 108–125.

[12] Ivlev V.Yu., Ivlev Yu.V. *Logicheskie issledovaniya — Logical investigations*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 92–99.

[13] Coniglio M.E., Golzio A.C. Swap structures semantics for Ivlev-like model logics. *International Journal of Soft Computing*, 2019, vol. 23, no. 7, pp. 2243–2254.

[14] Coniglio M.E., del Cerro L.F., Peron N.M. Finite non-deterministic semantics for some model systems. *Journal of non-Classical Logics*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 20–45.

[15] Omori H., Skurt D. More Modal Semantics Without Possible Worlds. *IFColog* pp. 815–846.

Ivlev Yu.V., Dr. Sc. (Philos.), Professor, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University, Professor Emeritus of MSU, Honorary Figure of Russian Higher Education, Laureate of Lomonosov Prize of Moscow State University, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences.
e-mail: ivlev.logic@yandex.ru