

## Обобщенные описания состояний для сильных логик первого уровня

© А.А. Беликов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

*Предложены семантики обобщенных описаний состояний для некоторых расширений логики Данна — Белнапа. Среди исследуемых расширений: логика Ривеччио — Питца (ETL) и логика Шрамко — Зайцева — Беликова (NFL). На основе обобщенных описаний состояний формулируются отношения следования, которые позволяют формализовать соответствующие логики.*

**Ключевые слова:** обобщенные описания состояний, релевантная логика, логическая семантика, паранепротиворечивость, парapolнота

Семантику обобщенных описаний состояний предложил профессор Е.К. Войшвилло в середине 1980-х годов. В качестве задачи, для решения которой им разработан данный подход, выступал поиск адекватной семантики для системы тавтологических следований А. Андерсена и Н. Белнапа. Заметим, однако, что на момент выхода основных работ Е.К. Войшвилло по данной теме адекватные семантики для тавтологических следствий уже существовали. В частности, в середине 1960-х годов была предложена алгебраическая семантика М. Данна, где в качестве моделей используется четырехзначная решетка де Моргана. В то же время М. Данн предлагает так называемую интуитивную семантику, основной чертой которой является использование обобщенной функции оценки. Это обобщение заключается в том, чтобы, помимо классических приписываний «истина» или «ложь», разрешить пресыщенные приписывания (*gluts*) и провальные (*gaps*), т. е. формулы могут быть одновременно истинными и ложными или могут быть ни истинными, ни ложными. Кроме того, в начале 1970-х годов Р. Раутли и Р. Мейер предложили семантику крипкевского типа с особым тернарным отношением достижимости. (Более подробно история развития логики FDE рассмотрена в [1].)

Подход Е.К. Войшвилло отличает особая трактовка понятий логического следования и семантической информации высказывания. Согласно данной концепции, логическое следование должно представлять собой связь между высказываниями относительно их семантической информации. Из высказывания *A* логически следует высказывание *B*, если и только если семантическая информация высказывания *B* является частью семантической информации высказывания *A*.

Что представляет собой семантическая информация произвольного высказывания? В рамках данной концепции под семантической информацией понимают число всех возможных ситуаций, при которых высказывание истинно относительно некоторого общего числа ситуаций. Для упрощения дальнейшего восприятия настоящей статьи введем ряд необходимых определений.

Все исследуемые в настоящей статье логики основаны на пропозициональном языке  $L$ , содержащем только связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Пусть  $Form$  и  $Prop$  обозначают множество всех формул языка  $L$  и множество всех пропозициональных переменных языка  $L$  соответственно. Множество  $Literals = Prop \cup \{\sim p : p \in Prop\}$  есть множество литералов. Под описанием состояний будем понимать всякое (возможно, бесконечное) множество литералов. Множество всех описаний состояний обозначим через  $States$ . Под функцией оценки будем понимать отображение  $v: Prop \times States \rightarrow \{\{t\}, \{f\}, \{t, f\}, \emptyset\}$ , где  $t$  используется для обозначения истины, а  $f$  — лжи.

Классическим описанием состояний будем называть такое описание состояний  $\alpha$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall p, p \in Prop (p \in \alpha \text{ или } \sim p \in \alpha); \quad (1)$$

$$\forall p, p \in Prop \neg (p \in \alpha \text{ и } \sim p \in \alpha). \quad (2)$$

**Семантика обобщенных описаний состояний для первоуровневой релевантной логики.** Как следует из названия данной семантики, она предполагает использование понятия обобщенных описаний состояний, которым будем называть описание состояний, не удовлетворяющее условиям (1) и (2), т. е. оно может быть пустым и противоречивым.

Чтобы завершить определение семантики данного типа для системы А. Андерсона и Н. Белнапа, сформулируем условия истинности для формул языка  $L$ .

**Определение 1.**

$$\begin{aligned} t \in v(p) &\Leftrightarrow p \in \alpha; f \in v(p) \Leftrightarrow \sim p \in \alpha; \\ t \in v(\sim A) &\Leftrightarrow f \in v(A); f \in v(\sim A) \Leftrightarrow t \in v(A); \\ t \in v(A \wedge B) &\Leftrightarrow t \in v(A) \text{ и } t \in v(B); f \in v(A \wedge B) \Leftrightarrow f \in v(A) \text{ или} \\ &f \in v(B); \\ t \in v(A \vee B) &\Leftrightarrow t \in v(A) \text{ или } t \in v(B); f \in v(A \vee B) \Leftrightarrow f \in v(A) \text{ и} \\ &f \in v(B). \end{aligned}$$

Определим отношение логического следования.

**Определение 2.**

$$A \vDash_{\text{fde}} B \Leftrightarrow \forall v \forall \alpha (t \in v_\alpha(A) \Rightarrow t \in v_\alpha(B))$$

Данное отношение адекватно формализуется системой FDE:

- (A1)  $A \wedge B \vdash A$ ; (A2)  $A \wedge B \vdash B$ ;  
 (A3)  $A \vdash A \vee B$ ; (A4)  $B \vdash A \vee B$ ;  
 (A5)  $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ;  
 (A6)  $\sim A \wedge \sim B \vdash \sim (A \vee B)$ ; (A7)  $\sim A \vee \sim B \vdash \sim (A \wedge B)$ ;  
 (A8)  $\sim (A \vee B) \vdash \sim A \wedge \sim B$ ; (A9)  $\sim (A \wedge B) \vdash \sim A \vee \sim B$ ;  
 (A10)  $\sim \sim A \vdash A$ ;  $A \vdash \sim \sim A$ ;  
 (R1)  $A \vdash C, B \vdash C \Rightarrow A \vee B \vdash C$ ; (R2)  $A \vdash B, A \vdash C \Rightarrow A \vdash B \wedge C$ ;  
 (R3)  $A \vdash B; B \vdash C \Rightarrow A \vdash C$ .

Доказательства соответствующих теорем представлены в работе [2].

**Семантики Войшвилло для различных расширений первоуровневой релевантной логики.** Логика FDE имеет ряд более сильных расширений<sup>1</sup>. Среди них хорошо известная трехзначная логика Клини ( $K_3$ ), логика Приста ( $P_3$ ), первоуровневый фрагмент релевантной логики Данна — МакКолла (RM) и классическая логика (TV). Каждая из этих систем получается из FDE за счет добавления соответствующих дедуктивных постулатов:

- $K_3 = \text{FDE} + A \wedge \sim A \vdash B$ ;  
 $P_3 = \text{FDE} + A \vdash B \vee \sim B$ ;  
 $\text{RM}_{\text{fde}} = \text{FDE} + A \wedge \sim A \vdash B \vee \sim B$ ;  
 $\text{TV} = \text{FDE} + A \wedge \sim A \vdash B + A \vdash B \vee \sim B$ .

Семантики обобщенных описаний состояний для этих логик сформулированы в работах Е.К. Войшвилло [3] и Е.Д. Смирновой [4].

В современных работах, посвященных данной проблематике, возникают новые интересные расширения логики FDE. В частности, в исследованиях У. Ривеччио, А. Питца [5], Ж. Маркоса [6], Я.В. Шрамко, Д.В. Зайцева и А.А. Беликова [7] рассмотрены новые расширения логики FDE в контексте четырехзначной семантики Н. Белнапа.

Напомним, что семантика Белнапа предполагает работу с четырьмя истинностными значениями: Т, В, N, F. Каждое значение интерпретируется следующим образом: Т — истинно и неложно; В — истинно и ложно; N — неистинно и неложно; F — ложно и неистинно.

Для того чтобы семантически определить логику FDE, необходимо найти отношение следования через сохранность значений Т и В. Если определить следование через сохранность единственного зна-

<sup>1</sup> Под сильными расширениями понимаются системы, которые превосходят FDE по числу доказываемых в ней теорем.

чения T, то будет получена логика ETL. Если через сохранность трех значений T, B и N, то будет получена логика NFL.

Вполне естественным представляется вопрос о том, можно ли охарактеризовать эти логики в контексте семантики обобщенных описаний состояний? Предлагаем утвердительный ответ на этот вопрос.

Условия истинности для формул языка L в обоих случаях (и ETL, и NFL) остаются такими же, как для FDE.

**Определение 3.**

$$\begin{aligned} t \in v(p) &\Leftrightarrow p \in \alpha; f \in v(p) \Leftrightarrow \sim p \in \alpha; \\ t \in v(\sim A) &\Leftrightarrow f \in v(A); f \in v(\sim A) \Leftrightarrow t \in v(A); \\ t \in v(A \wedge B) &\Leftrightarrow t \in v(A) \text{ и } t \in v(B); f \in v(A \wedge B) \Leftrightarrow f \in v(A) \\ &\text{или } f \in v(B); \\ t \in v(A \vee B) &\Leftrightarrow t \in v(A) \text{ или } t \in v(B); f \in v(A \vee B) \Leftrightarrow f \in v(A) \\ &\text{и } f \in v(B). \end{aligned}$$

Непосредственной модификации подвергается лишь определение следования. В случае с логикой ETL предлагается трактовать следование через сохранность истинности и неложности от посылок к заключению.

**Определение 4.**

$$A \models_{\text{etl}} B \Leftrightarrow \forall v \forall \alpha (t \in v_{\alpha}(A) \text{ и } f \notin v_{\alpha}(A)) \Rightarrow (t \in v_{\alpha}(B) \text{ и } f \notin v_{\alpha}(B)).$$

Для определения следования в логике NFL удобно трактовать его через сохранность ложности и неистинности от заключения к посылкам.

**Определение 5.**

$$A \models_{\text{nfl}} B \Leftrightarrow \forall v \forall \alpha (f \in v_{\alpha}(B) \text{ и } t \notin v_{\alpha}(B)) \Rightarrow (f \in v_{\alpha}(A) \text{ и } t \notin v_{\alpha}(A)).$$

Данные логики обладают всеми семантическими свойствами ETL и NFL соответственно. В качестве некоторого обоснования рассмотрим случай с логикой ETL. Покажем, что для ETL-следования имеет место  $A \wedge \sim A \models B$ ,  $A \not\models B \vee \sim B$ , а также  $A \wedge \sim A \models C$ ,  $B \wedge \sim B \models C$ , но  $(A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B) \not\models C$ .

Допустим, что  $A \wedge \sim A \not\models B$ . Тогда  $t \in v_{\alpha}(A \wedge \sim A)$  и  $f \notin v_{\alpha}(A \wedge \sim A)$  и  $(t \notin v_{\alpha}(B) \text{ или } f \in v_{\alpha}(B))$ . Отсюда в силу условий истинности для конъюнкции получаем, что  $t \in v_{\alpha}(A)$ ,  $t \in v_{\alpha}(\sim A)$  и  $f \notin v_{\alpha}(A)$ . Из  $t \in v_{\alpha}(\sim A)$  получаем  $f \in v_{\alpha}(A)$ , что приводит к противоречию. Таким образом,  $A \wedge \sim A \models B$ .

Допустим, что  $A \not\models B \vee \sim B$ . Тогда  $t \in v_\alpha(A)$  и  $f \notin v_\alpha(A)$ , и  $(t \notin v_\alpha(B \vee \sim B))$  или  $f \in v_\alpha(B \vee \sim B)$ . Отсюда в силу условий истинности для дизъюнкции  $f \in v_\alpha(B)$ ,  $f \in v_\alpha(\sim B)$ . Из этого следует, что  $f \in v_\alpha(B)$ ,  $t \in v_\alpha(B)$ . Используя определение 3, получаем, что  $\sim B \in \alpha$  и  $B \in \alpha$ . Последнее не является противоречием, поскольку допускаются противоречивые описания состояний.

Допустим, что  $A \wedge \sim A \models C$ ,  $B \wedge \sim B \models C$ , но  $(A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B) \not\models C$ . Тогда  $t \in v((A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B))$  и  $f \notin v((A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B))$ , а также  $t \notin v(C)$  или  $f \in v(C)$ . Из того, что  $t \in v((A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B))$ , получаем  $t \in v(A \wedge \sim A)$  или  $t \in v(B \wedge \sim B)$ . Из того, что  $f \notin v((A \wedge \sim A) \vee (B \wedge \sim B))$ , имеем  $f \notin v(A \wedge \sim A)$  или  $f \notin v(B \wedge \sim B)$ .

Будем рассуждать разбором случаев. Пусть  $t \in v(A \wedge \sim A)$  и  $f \notin v(B \wedge \sim B)$ . Тогда  $t \in v(A)$  и  $t \in v(\sim A)$ , а также  $f \notin v(B)$  и  $f \notin v(\sim B)$ . Из того, что  $t \in v(\sim A)$  и  $f \notin v(\sim B)$ , получаем, что  $t \notin v(B)$  и  $f \in v(A)$ . Отсюда следует, что существует такое описание состояний  $\alpha$ , что  $A \in \alpha$ ,  $\sim A \in \alpha$ ,  $B \notin \alpha$  и  $\sim B \notin \alpha$ . Но рассматриваемая семантика допускает существование противоречивых и неполных описаний состояний. Таким образом, исходное допущение опровергнуть не удалось. Следовательно, в семантике, основанной на определениях 3 и 4, проваливается правило непрямого исключения дизъюнкции.

Нетрудно проверить, что семантика, основанная на определениях 3 и 5, порождает логику NFL. Используя похожие рассуждения, можно обосновать, что в ней не действуют правило введения конъюнкции и закон «из противоречия следует все что угодно», но имеет место  $A \models B \vee \sim B$ .

Приведенные выше семантики позволяют охарактеризовать ряд интересных логик, которые были открыты совсем недавно. Таким образом, в настоящей работе предпринята попытка развития проекта обобщенных описаний состояний Е.К. Войшвилло. Доказательства соответствующих теорем об адекватности будут представлены в последующих работах.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Dunn J.M., Restall G. *Relevance logic. Handbook of philosophical logic.* Springer, Netherlands, 2002, pp. 1–128.
- [2] Dunn J.M. Partiality and its dual. *Studia Logica*, 2000, vol. 66, no. 1, pp. 5–40.

- [3] Войшвилло Е.К. *Философско-методологические аспекты релевантной логики*. Москва, URSS, 2011, 139 с.
- [4] Смирнова Е.Д. *Логика и философия*. Москва, РОССПЭН, 1996, 304 с.
- [5] Pietz A., Rivieccio U. Nothing but the Truth. *Journal of Philosophical Logic*. 2013, no. 42, pp. 125–135.
- [6] Marcos J. The value of the two values. In: *Logic without Frontiers: Festschrift for Walter Alexandre Carnielli on the Occasion of his 60th Birthday (Tributes)*. J.Y. Beziau, M.E. Coniglio, eds. College Publications, 2011, pp. 277–294.
- [7] Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. First-degree entailment and its relatives. *Studia Logica*, 2017, vol. 105, no. 6, pp. 1291–1347.

Статья поступила в редакцию 20.03.2018

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Беликов А.А. Обобщенные описания состояний для сильных логик первого уровня. *Гуманитарный вестник*, 2018, вып. 3.

<http://dx.doi.org/10.18698/2306-8477-2018-3-513>

**Беликов Александр Александрович** — специалист по учебно-методической работе, кафедра «Логика», философский факультет МГУ им. М. В. Ломоносова.  
e-mail: belikov@philos.msu.ru

## **Generalised state descriptions for strong first-degree entailment logic extensions**

© A.A. Belikov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

*The article proposes a number of generalised state description semantics for certain Dunn — Belnap logic extensions. The extensions under investigation include the Rivieccio — Pietz (ETL) and Shramko — Zaitsev — Belikov (NFL) logics. Generalised state descriptions form the basis for defining entailment relations that enable us to formalise the corresponding logics.*

**Keywords:** *generalised state descriptions, relevance logic, logical semantics, paraconsistency, paracompleteness*

### REFERENCES

- [1] Dunn J.M., Restall G. *Relevance logic. Handbook of philosophical logic.* Springer, Netherlands, 2002, pp. 1–128.
- [2] Dunn J.M. *Studia Logica*, 2000, vol. 66, no. 1, pp. 5–40.
- [3] Voyshvillo E.K. *Filosofsko-metodologicheskie aspekty relevantnoy logiki* [Philosophical and methodological aspects of relevance logic]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2011, 139 p.
- [4] Smirnova E.D. *Logika i filosofiya* [Logic and philosophy]. Moscow, ROSSPEN; Russian Political Encyclopedia Press, 1996, 304 p.
- [5] Pietz A., Rivieccio U. *Journal of Philosophical Logic*, 2013, no. 42, pp. 125–135.
- [6] Marcos J. The value of the two values. In: *Logic without Frontiers: Festschrift for Walter Alexandre Carnielli on the Occasion of his 60th Birthday (Tributes)*. J.Y. Beziau, M.E. Coniglio, eds. College Publications, 2011, pp. 277–294.
- [7] Shramko Y., Zaitsev D., Belikov A. *Studia Logica*, 2017, vol. 105, no. 6, pp. 1291–1347.

**Belikov A.A.**, Training and Methodology Specialist, Department of Logic, Faculty of Philosophy, Lomonosov Moscow State University. e-mail: belikov@philos.msu.ru